

# Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 56

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

11 de mayo de 2021

## 1. Demostrar que $|e^A| = e^{\text{Tr}\{A\}}$ .

Sea  $A$  una matriz  $N \times N$  compleja, sabemos que toda matriz compleja es triangularizable, es decir se puede escribir como

$$A = PTP^{-1} \quad (1)$$

Con  $T$  una matriz triangular, es decir  $T_{ij} = 0$  si  $i > j$  y  $P$  cierta matriz invertible. Ahora podemos ver como se relacionan la exponencial y la traza de  $A$  con la exponencial y la traza de  $T$ . Empecemos demostrando que

$$(PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} \quad (2)$$

Esto se puede demostrar con inducción, para  $n = 0$  tenemos

$$I = (PTP^{-1})^0 = PT^0P^{-1} = PP^{-1}$$

Y, asumiendo el caso  $n = k$  podemos demostrar

$$(PTP^{-1})^{k+1} = (PTP^{-1})^k PTP^{-1} = PT^kP^{-1}PTP^{-1} = PT^{k+1}P^{-1}$$

Ahora podemos usar este resultado en la definición de exponencial

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(PTP^{-1})^n}{n!} = P \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} P^{-1} = Pe^T P^{-1} \quad (3)$$

Si ahora hacemos el determinante obtenemos que

$$|e^A| = |P||e^T||P^{-1}| = |e^T| \quad (4)$$

Y para la traza, usando la propiedad cíclica:

$$\text{Tr}\{A\} = \text{Tr}\{PTP^{-1}\} = \text{Tr}\{TP^{-1}P\} = \text{Tr}\{T\} \quad (5)$$

Por lo tanto, demostrar que  $|e^T| = e^{\text{Tr}\{T\}}$  es equivalente a demostrarlo para la matriz  $A$ , como toda matriz  $A$  se puede expresar de la forma (1), nos basta con demostrar la propiedad para una matriz triangular arbitraria.

Notemos que si  $T$  es una matriz triangular y definimos  $\lambda_i = T_{ii}$ , entonces  $T^n$  es una matriz triangular y  $(T^n)_{ii} = \lambda_i^n$ . Esto de nuevo lo demostramos por inducción (el caso  $n = 1$  es cierto por definición) En efecto para  $i > j$

$$(T^{k+1})_{ij} = \sum_{l=1}^N (T^k)_{il}T_{lj} = \sum_{l < i} (T^k)_{il}T_{lj} + \sum_{l \geq i > j} (T^k)_{il}T_{lj} = 0$$

Donde la suma de la izquierda es cero porque  $i > l \implies (T^k)_{il} = 0$  y la de la derecha es cero porque  $l > j \implies T_{lj} = 0$ . Por lo tanto, en efecto  $T^n$  es una matriz triangular y los elementos de la diagonal son

$$(T^{k+1})_{ii} = \sum_{j=1}^N (T^k)_{ij}T_{ji} = \sum_{j < i} (T^k)_{ij}T_{ji} + \sum_{j=i}^N (T^k)_{ij}T_{ji} + \sum_{j > i}^N (T^k)_{ij}T_{ji} = (T^k)_{ii}T_{ii} = \lambda_i^k \lambda_i = \lambda_i^{k+1}$$

Donde la suma para  $j < i$  es cero debido a que  $T^k$  es triangular y la suma  $j > i$  es cero debido a que  $T$  es triangular. Finalmente, de la definición de exponencial es ahora trivial ver que  $e^T$  es también triangular

$$(e^T)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T^n)_{ij}}{n!} = 0, \quad \text{si } i > j$$

Además

$$(e^T)_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T^n)_{ii}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{n!} = e^{\lambda_i}$$

Finalmente solo nos queda por demostrar que el determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal, pero esto se ve fácilmente con la expresión

$$|T| = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} T_{1i_1} \dots T_{Ni_N}$$

Debido a que  $T$  es triangular, el término  $T_{ni_n}$  sólo sobrevive si  $i_n \geq n$ , pero debido a que no puede haber dos índices repetidos, esto implica que el único término que sobrevive es  $i_N = N, i_{N-1} = N-1, \dots, i_1 = 1$ . Y por lo tanto

$$|T| = T_{11} \dots T_{NN} = \prod_{i=1}^N \lambda_i$$

Aplicando esta propiedad a la matriz exponencial

$$|e^T| = \prod_{i=1}^N e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^N \lambda_i} = e^{\text{Tr}\{T\}}$$

Donde, por definición,

$$\text{Tr}\{T\} = \sum_{i=1}^N T_{ii} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (6)$$

Quedando demostrada la propiedad para matrices triangulares, y como hemos comentado al principio, demostrando así la propiedad para cualquier matriz compleja.

## 2. Demostrar que las propiedades bilineal y nilpotente son equivalentes a la propiedad antisimétrica.

La propiedad bilineal de un corchete de Lie nos dice que

$$[\lambda A + \mu B, C] = \lambda[A, C] + \mu[B, C] \quad (7)$$

$$[A, \lambda B + \mu C] = \lambda[A, B] + \mu[A, C] \quad (8)$$

Y la propiedad nilpotente nos dice que

$$[A, A] = 0 \quad (9)$$

Con ambas propiedades, podemos calcular el corchete de Lie de  $A + B$  consigo misma:

$$0 \stackrel{(9)}{=} [A + B, A + B] \stackrel{(7)}{=} [A, A + B] + [B, A + B] \stackrel{(7)}{=} [A, A] + [A, B] + [B, A] + [B, B] \stackrel{(9)}{=} [A, B] + [B, A]$$

De esta ecuación se deduce entonces que

$$[A, B] = -[B, A] \quad (10)$$

Claramente, el razonamiento es válido para cualquier par de matrices  $A$  y  $B$ .

### 3. Demostrar que los polinomios de grado dos con el corchete definido (11) es un álgebra de Lie.

$$[a, b] = [a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0] = (a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x + (a_2b_1 - a_1b_2) \quad (11)$$

En efecto, veamos que cumple la propiedad bilineal:

$$\begin{aligned} [\lambda a + \mu b, c] &= ((\lambda a_1 + \mu b_1)c_0 - (\lambda a_0 + \mu b_0)c_1)x^2 + ((\lambda a_0 + \mu b_0)c_2 - (\lambda a_2 + \mu b_2)c_0)x \\ &\quad + ((\lambda a_2 + \mu b_2)c_1 - (\lambda a_1 + \mu b_1)c_2) \\ &= \lambda [(a_1c_0 - a_0c_1)x^2 + (a_0c_2 - a_2c_0)x + (a_2c_1 - a_1c_2)] \\ &\quad + \mu [(b_1c_0 - b_0c_1)x^2 + (b_0c_2 - b_2c_0)x + (b_2c_1 - b_1c_2)] \\ &= \lambda[a, c] + \mu[b, c] \end{aligned}$$

Demostremos ahora la propiedad antisimétrica:

$$\begin{aligned} [a, b] &= (a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x + (a_2b_1 - a_1b_2) \\ &= -(b_1a_0 - b_0a_1)x^2 - (b_0a_2 - b_2a_0)x - (b_2a_1 - b_1a_2) \\ &= -[b, a] \end{aligned}$$

Con la propiedad antisimétrica podemos demostrar que el corchete es también bilineal por la derecha:

$$[a, \lambda b + \mu c] \stackrel{(10)}{=} -[\lambda b + \mu c, a] \stackrel{(7)}{=} -\lambda[b, a] - \mu[c, a] \stackrel{(10)}{=} \lambda[a, b] + \mu[a, c]$$

La propiedad nilpotente tampoco es difícil de demostrar

$$[a, a] = (a_1a_0 - a_0a_1)x^2 + (a_0a_2 - a_2a_0)x + (a_2a_1 - a_1a_2) = 0x^2 + 0x + 0 = 0 \quad (12)$$

Demostrar la identidad de Jacobi es un poco más pesado, pero afortunadamente, usemos las propiedades que ya hemos demostrado para simplificar la expresión del corchete:

$$[a, b] = [a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0] = (a_2b_1 - a_1b_2)[x^2, x] + (a_2b_0 - a_0b_2)[x^2, 1] + (a_1b_0 - a_0b_1)[x, 1]$$

Por lo que en realidad solo estamos interesados en conocer los corchetes  $[x^2, x]$ ,  $[x^2, 1]$ ,  $[x, 1]$ . Usando la definición

$$[x^2, x] = 1, \quad [x^2, 1] = -x, \quad [x, 1] = x^2 \quad (13)$$

En general podemos afirmar que

$$[x^a, x^b] = -\varepsilon^{abc}x^c \quad (14)$$

Donde  $x^a$  significa, por una vez, exponenciación, y no un superíndice. La identidad de Jacobi la podemos escribir entonces como

$$\begin{aligned} [[x^a, x^b], x^c] + [[x^b, x^c], x^a] + [[x^c, x^a], x^b] &= [-\varepsilon^{abd}x^d, x^c] + [-\varepsilon^{bcd}x^d, x^a] + [-\varepsilon^{cad}x^d, x^b] \\ &= [\varepsilon^{abd}\varepsilon^{dce} + \varepsilon^{bcd}\varepsilon^{dae} + \varepsilon^{cad}\varepsilon^{dbe}]x^e \\ &= [\delta^{ac}\delta^{be} - \delta^{ae}\delta^{bd} + \delta^{ba}\delta^{ce} - \delta^{be}\delta^{ca} + \delta^{cb}\delta^{ae} - \delta^{ce}\delta^{ab}]x^e \\ &= 0 \end{aligned}$$

Demostrando la identidad de Jacobi, y por lo tanto, que los polinomios de grado 2 con el corchete (11) forman un álgebra de Lie.